سازمان برنامه و بودجه
دفتر برنامه‌ریزی منطقه‌ای

آنالیز پرینسیپال کامپوننتز

(روش ایجاد مؤلفه‌های اصلی)

در تهیه شاخص‌های توسعه برای شهرستان‌ها جهت برنامه‌ریزی منطقه‌ای

بیژن بیدآباد

پائیز ۱۳۶۲

پیشگفتار

مسئله شناسائی وضع موجود و تطبیق اوضاع مناطق یکی از مهمترین عوامل پی‌ریزی مدل‌های ریاضی در برنامه‌ریزی منطقه‌ای می‌باشد. واضح است که تفاوت‌های چند منطقه در یک خصوصیت خلاصه نمی‌شود، غالباً خصوصیت‌ها در یک منطقه با منطقه دیگر تفاوت بسیار دارد. در یک منطقه ممکن است خصوصیتی خیلی بارز باشد و در منطقه‌ای دیگر خصوصیت دیگری بر سایر خصوصیات برتری داشته باشد، آیا می‌توان تمام خصوصیت‌ها را با هم جمع کرد و شاخصی که بیانگر وضع یک منطقه نسبت به مناطق دیگر باشد ایجاد نمود، و یا روش‌های دیگری مانند روش فوق انتخاب کرد؟ جواب کاملاً واضح است که تعداد بیمارستان را با تعداد قنات و معادن و صنایع به صورت ساده نمی‌توان جمع و تفریق نمود. حتی در بعضی اوقات دیده شده است که پس از دادن وزنی به اقلام مذکور آنها را با هم جمع و تفریق می‌نمایند. پرواضح است که روش‌های فوق خطاهای بسیار زیادی دارند و شاید نادیده گرفتن روش‌های علمی در این مورد می‌باشند که هرکس به سلیقه خود می‌تواند شاخص ایجاد کند ولی تضمینی ندارد که شاخص‌ها همه بیانگر یک مطلب باشند.

در جهت ایجاد شاخص‌های علمی و روش‌های طبقه‌بندی، علوم اجتماعی پیشرفت‌های زیادی کرده است و ای بسا پشت پا زدن به واقعیت‌های علمی است که آنها را نادیده فرض کنیم و به دنبال روش‌هایی باشیم که کلاً دیدگاه خود ما را ارائه دهد نه واقعیت موجود را. چندی پیش در جهت بررسی چنین شاخص‌هایی سعی شد که مقاله کوتاهی تحت عنوان "آنالیز تکسونومی (روش طبقه‌بندی گروههای همگن) در طبقه‌بندی شهرستان‌ها و ایجاد شاخص‌های توسعه جهت برنامه‌ریزی منطقه‌ای" نوشته شود که با استقبال فراوانی که از آن به عمل آمد نگارنده را به این فکر انداخت که نگاهی هر چند مختصر نیز به روش‌های متداول دیگر انداخته شود. لذا روش آنالیز پرینسیپال کامپوننتز از میان انبوه روش‌های موجود به دلیل معروفیت و کاربرد زیاد آن انتخاب گردید.

غالب اوقات این فکر پیش می‌آید که شاید کاربرد ریاضیات در بررسی الگوهای اجتماعی نحوه بررسی را مشکل‌تر می‌سازد ولی باید اذعان داشت که کاربرد الگوهای ریاضی باعث درک بهتر مطالب می‌شود نه غامض شدن مسئله، بواسطه این امر سعی ما بر این بوده تا در این مقاله مطلب به شکلی ارائه شو که خواننده قدم به قدم در فراگرد مسئله پیش رود نه اینکه قسمتی نامفهوم بماند و مطلب در نظر وی بریده جلوه گردد. در آخر از آقای نبئی که ویرایش مقاله و خانم عنبری که تایپ آن را عهده‌دار شدند تشکر نموده و امیدوارم که سایر همکاران گرامی نیز از کمک‌های فکری خود دریغ ننموده و نگارنده را جهت تکمیل و رفع نواقص این مقاله راهنمایی فرمایند.

بیژن بیدآباد
کارشناس دفتر برنامه‌ریزی منطقه‌ای

آنالیز پرینسیپال کامپوننتز

آنالیز پرینسیپال کامپوننتز Principle Components یا مؤلفه‌های اصلی یکی از قدیمی‌ترین تکنیک‌های تجزیه تحلیل داده‌های آماری با واریاسیون‌های چند بُعدی یا Multivariate بوده و می‌توان آن را یکی از با استفاده‌ترین راه‌های خلاصه کردن یک تعداد از متغیرها به شکل فشرده و پیدا کردن ساختار کواریانس آنها دانست. همچنین روش پرینسیپال کامپوننتز قادر است که پدیده‌هائی را که از لحاظ ارزیابی کمّی مشکلات زیادی دارند را دسته بندی نموده و جهت توجیه آنها شاخص‌هائی ارائه دهد. متدلوژی آن تا حدی شبیه به بسط روش حداقل مربعات ارتوگونال Orthogonal Least Squares می‌باشد که توسط K. Pearson[1] در سال ۱۹۰۱ ارائه گردید و بعد از آن توسط H.Hotelling [2] در سال ۱۹۳۶ برای تجریه و تحلیل ساختار همبستگی گسترش یافت.

مقصود ما از ارائه این مقاله فقط معرفی مختصر روش پرینسیپال کامپوننتز می‌باشد نه بررسی تمام جوانب روش مذکور. برای توضیحات کامل‌تر می‌توان به متون Multivariate Analysis مراجعه نمود.

مجموعه F را در نظر می‌گیریم که شامل n عضو بوده که هر کدام شهرستان‌های مختلف ۱ و ۲ و ... و n باشد برای یک گروه از متغیرهای ۱ و ۲ و ... و m که همان خصوصیت‌ها یا شاخص‌های اولیه‌ای هستند که به عنوان داده‌ها در الگو ظاهر می‌شوند یا به عبارت دیگر داده‌های اولیه ما به شکل زیر می‌باشند.

$$P_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), P_2(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots P_n(y_1, y_2, \ldots, y_m). \quad (1)$$

بردارهای فوق را می توان به شکل ماتریس زیر نشان داد:

ماتریس (الف)

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & Y_{2m} \\ & & & \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \ldots & Y_{nm} \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق n و ... و ۲ و ۱ وi=1 و m و ... و ۲ و ۱ = j و Y_{ij} معرف خصوصیت jام از شهرستان iام می‌باشد. یعنی هر کدام از n شهرستان (ردیف) دارای m خصوصیت (ستون) قابل اندازه‌گیری هستند.

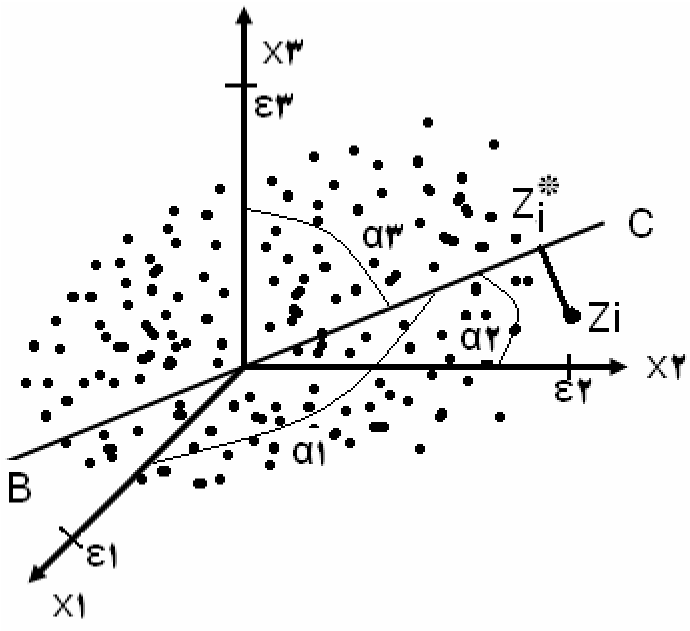
---

[1]- K.Pearson, "On lines and plans of closest fit to systems of points in space", Philosophical Magazine, # (1901): pp. 559 – 572.

[2]- H. Hotelling, "Simplified calculation of principal components" Psychometrica I (1936) PP. 27 – 35.

هر عضو از جامعه مذکور ما توسط یک بردار در فضای m بعدی نمایش داده می‌شود که هر بعد متـربط با یک خصوصیت است. برای روشن‌تر شدن آنالیز پرنیسیپال کامپوننتز می‌توانیم m را مساوی ۳ قرار داده و توزیع متغیرها را به شکل انبوهی از نقاط پراکنده به شکل نمودار (۱) نشان دهیم:

نمودار (۱)



برای سهولت محورها طوری رسم شده‌اند که نقطه میانگین‌های نمونه $\bar{Z}_i$ با مبداء مختصات یکی باشند البتـه ایـن فرض مهمی است بدین معنی که عضوهای ماتریس الف را به عنوان انحراف از میانگین هر ستون در نظر گرفته‌ایم یعنی ماتریس Y را به ماتریس X تبدیل کرده‌ایم که :

$$X_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_j \qquad (1/1)$$

که :

$$\bar{Y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{ij}}{n} \qquad (1/2)$$

$$x=\begin{bmatrix} Y_{11}-Y_1 & Y_{12}-Y_2 \ldots Y_{1m}-Y_m \\ Y_{21}-Y_1 & Y_{22}-Y_2 \ldots Y_{2m}-Y_m \\ & \\ & \\ Y_{n1}-Y_1 & Y_{n2}-Y_2 \ldots Y_{nm}-Y_m \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

ماتریس ب

از جهتی دیگر باید به خاطر داشت که تمام Y_{ij} ها باید دارای یک مقیاس اندازه‌گیری باشند. گرچه اگر دارای یک مقیاس واحد اندازه‌گیری هم نباشند می‌توان آنها را به شکلی که بعداً توضیح داده خواهد شد بکاربرد ولی به هر حال در این قدم لطمه‌ای به روش ما نخواهد زد و فقط باید بیاد داشت تا در محل خود توضیح داده شود.

بر روی هر محور یک بردار واحد $(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1)$ در مقیاس‌های مناسب مشخص شده‌اند. حال متغیرهای X_3, X_2, X_1 را می‌توان به عنوان اسکالر قلمداد کرد بطوریکه هر بردار Z_i بتواند به عنوان یک ترکیب خطی از مشاهدات مربوط به سه متغیر تعریف شود:

(۲) $$Z_i=\varepsilon_1 X_{i1}+\varepsilon_2 X_{i2}+\varepsilon_3 X_{i3}$$

حال یک شعاع دلخواه مانند BC را در نظر می‌گیریم که از مبداء مختصات عبور می‌کند. این شعاع را می‌توانیم با سه زاویه‌ای که با محورهای مختصات می‌سازد $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ کاملاً معین کنیم. شرط لازم برای اینکه شعاع مزبور یک شعاع واحد باشد باید داشته باشیم:

$$Cos^2\alpha_1+Cos^2\alpha_2+Cos^2\alpha_3=1$$

فرض کنید هر بردار بر روی شعاع BC بوسیله یک عمودی تصویر شده است. هر تصویر بر روی BC می‌تواند توسط یک تابعی از سه کسینوس زوایای $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ تعریف شود به ترتیبی که در ازای هر بردار برابر باشد با :

(۴) $$\|Z_i\|=\varepsilon_1 X_{i1}.Cos\alpha_1+\varepsilon_2 X_{i2} Cos\alpha_2+\varepsilon_3 X_{i3} Cos\alpha_3$$

حال فرض می‌کنیم اجتماع بردارها، که به هر کدام بیانگر یک عضو از جامعه می‌باشند بطور تصادفی توزیع نشده و یک شکل الیپسوئید (Ellipsoid) را تشکیل داده‌اند مانند نمودار (۱). اگر شعاع مورد نظر ما بخواهد به عنوان نماینده این الیپسوئید در نظر گرفته شود باید هر چه نزدیکتر به محور اصلی آن باشد این موضوع را از دو راه می‌توانیم بدست بیاوریم:

الف – با حداقل کردن مجموع مجذورات فواصل از هر نقطه تا تصویر آن بر روی شعاع که روش رگرسیون ارتوگونال می‌باشد.

ب – با حداکثر کردن واریانس تصاویر بر روی شعاع به عبارت دیگر: با حداکثر کردن مجموع مجذورات درازای تصاویر بردارها.

قدم بعدی ما انتخاب زوایای α است بطوری که واریانس حداکثر شود با توجه به این شرط که شعاع بدست آمده واحد باشد و از مبداء مختصات عبور کند.

برای سهولت فرض می‌کنیم :

$$a_1 = \varepsilon_1 \, Cos\, \alpha_1 \tag{5}$$

$$a_2 = \varepsilon_2 \, Cos\, \alpha_2 \tag{6}$$

$$a_3 = \varepsilon_3 Cos \alpha_3 \tag{7}$$

واریانس تصاویر بر روی شعاع برابر خواهند بود با:

$$V_1 = (a_1 \, X_{11} + a_2 \, X_{12} + a_3 \, X_{13})^2 \tag{8}$$

$$V_2 = (a_1 \, X_{21} + a_2 \, X_{22} + a_3 \, X_{23})^2 \tag{9}$$

$$V_3 = (a_1 \, X_{31} + a_2 \, X_{32} + a_3 \, X_{33})^2 \tag{10}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \tag{11}$$

مجموع کل واریانسها برابر خواهد بود با (۱۱) یا :

$$V = \sum_{i=1}^{n} (a_1 \, X_{i1} + a_2 \, X_{i2} + a_3 \, X_{i3})^2 \tag{12}$$

حال تابع V باید حداکثر گردد به شرطی که:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \tag{13}$$

شرط (۱۳) با جایگزینی (۵) و (۶) و (۷) در معادله (۳) حاصل شده است. حال دوباره برمی‌گردیم به صورت اصلی مسئله که m و ... و ۲ و ۱ = j باشد بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \tag{14}$$

بردار ستونی a بابعاد : m x۱

$$a' = [a_1 \quad a_2 \quad .... \quad a_m] \tag{15}$$

ترانسپوز بردار a بابعاد 1xm

پس شرط (۱۳) را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم :

$$(16) \qquad a'a=1$$

$$(17) \qquad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \dots a_m^2 = \sum_{i=1}^{m} a_m^2 = 1$$

تابع V برای m = ۳ شکل معادله (۱۲) را به خود گرفته است بـرای m و ... و ۲ و ۱ = j بـه شـکل زیـر در خواهـد آمد:

$$(18) \qquad V = \sum_{i=1}^{n} (a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + \dots a_i X_{im})^2$$

$$(19) \qquad V = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} a_j X_{ij})^2$$

واضح است که تابع V کوادراتیک (Quadratic) می‌باشد. اگر شکل (۱۹) یا (۱۸) آن را بسط دهیم به شـکل زیـر درخواهد آمد:

$$(20) \qquad V = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} a_j x_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \dots + a_m x_{im})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_1^2 x_{i1}^2 + \dots + a_m^2 x_{im}^2 + 2a_1 x_{i1} a_2 x_{i2} + \dots + 2a_1 x_{i2} a_m x_{im}$$

$$+ 2a_2 x_{i2} a_3 x_{i3} + \dots + 2a_2 x_{i2} a_m x_{im} + \dots\dots\dots)$$

یا :

$$(21) \quad V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_j^2 x_{ij}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{r \prec k}^{m-1 \prec m} a_r a_k x_{ik} x_{ir}$$

$$(j, k = 1, 2, \dots, m)$$

$$(i \quad = 1, 2, \dots, n)$$

$$(r \quad = 1, 2, \dots, m-1)$$

حالا شکل (۲۱) تابع V را با توجه به محدودیت (۱۷) ماکزیمیم می‌کنیم:

$$(22) \quad Max: \ V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_j^2 x_{ij}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{r \prec k}^{k=m} a_r a_k x_{ir} x_{ik}$$

$$(23) \quad S.To: \ \sum_{i=1}^{m} a_i^2 = 1$$

برای حل مسئله فوق از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$(23/1) \quad Max: \ L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_j^2 x_{ij}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{r \prec k}^{k=m} a_r a_k x_{ir} x_{ik} - \lambda (\sum_{i=1}^{m} a_i^2 - 1)$$

شرط لازم برای ماکزیمم کردن را تشکیل می‌دهیم یا به عبارت دیگر مشق‌های جزئی را نـسبت بـه a_i, λ گرفتـه مساوی صفر قرار داده :

$$(23/2)\quad \frac{\delta L}{\delta a_2}=2\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\,(a_1\, x_{i1}+a_2\, x_{i2}+\ldots+a_m\, x_{im})-2\lambda a_1=0$$

$$(23/3)\quad \frac{\delta L}{\delta a_2}=2\sum_{i=1}^{n} x_{i\,2}\,(a_1 x_{i\,1}+a_2 x_{i\,2}+\ldots+a_m\, x_{im})-2\lambda a2=0$$

$$\vdots$$

$$(23/4)\quad \frac{\delta L}{\delta a_m}=2\sum_{i=1}^{n} x_{im}\,(a_1\, x_{i1}+a_2\, x_{i2}+\ldots+a_m\, x_{im})-2\lambda a2=$$

$$(23/5)\quad \frac{\delta L}{\delta_{\lambda}}=\sum_{i=1}^{n} a_i^2-1=0$$

دستگاه بالا دارای m+1 مجهول و m+1 معادله می‌باشد پس از حل مقادیر a_iها و λ بدست آمده که اگر آنها را در معادلات :

$$(23/6)\quad Z_i\ =a_i\, x_{i1}+a_2\, x_{i2}+\ldots+a_m\, x_{im}\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

بگذاریم مقادیر Z_i بدست آمده که مؤلفه‌های اصلی یا پرینسیپال کامپوننتز متغیرهای ما برای n شهرستان می‌باشد. البته شهرستان کافی هم باید برقرار باشد به این ترتیب که اگر d را علامت دیفرانسیل در نظر بگیریم و $V_{ij}\, da_{\,i}\, da_{\,j}$ را مشتق مرتبه دوم نسبت به a_i و بعد a_j در نظر بگیریم نامساوی زیر که قسمت چپ آن کوادراتیک است برقرار باشد.[3]

$$\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{m}\ V_{ij}\, da_i\, da_j \prec 0$$

ولی ناگفته نماند که سیستم معادلات (۲۳/۲) تا (۲۳/۵) سیستم معادلات همگن می‌باشد که دارای دو دسته جواب trivial (صفر) و nontrivial (غیر صفر) می‌باشد که حل آن با استفاده از جبر ماتریس‌ها توضیح داده خواهد شد.

حالا دوباره برمی‌گردیم به روشی که بتوان آن را با استفاده از جبر ماتریس‌ها حل کرد و تسهیلاتی در جهت حل سیستم معادلات فوق ایجاد کنیم و یا اگر مقیاس‌های متفاوت در ستون‌های ماتریس داده‌ها (ماتریس الف) داشته باشیم بتوانیم مشکل ایجاد شده را برطرف کنیم.

حال ماتریس S که ماتریس واریانس – کواریانس است را معرفی می‌کنیم:

ماتریس (ج)

$$S=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$$

[3]– Henderson & Quandt; Microeconomic theory, a mathematical approach, mathematical appendix.

ماتریس S ماتریسی است مربع با ابعاد mxm تمام اعضای آن نسبت به قطر ماتریس قرینه می‌باشند. عناصر قطر اصلی آن نشان‌دهنده واریانس یک متغیر و عناصری که خارج از قطر اصلی قرار دارند به عنوان کواریانس بین دو متغیر می‌باشند. اعضای تشکیل دهندهٔ آن:

$$(23/7) \quad \sigma_{rk} = \sum_{i=1}^{n} x_{ir}\, x_{ik} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ir}\, x_{ik}}{n} = Cov(x_r x_k)$$

برای

$$\sigma_{rk} = Cov\ (x_r, x_k), r \neq k\ ,\ \sigma_{rk} = Var(x_r), r = k$$

می‌باشد. براحتی می‌توان نشان داد که معادله (۲۳/۷) به شکل زیر است:

$$(23/8) \quad \sigma_{rk} = \sum_{i=1}^{n} x_{ir}\, x_{ik}$$

با گذاشتن معادلهٔ (۳۶) در (۲۳/۷) شکل فوق بدست می‌آید ولی شکل مزبور شکل کلی بدست آوردن σ_{rk} می‌باشد که اگر در (۲۳/۷) معادلات (۳۳) و (۳۴) را جایگزین کنیم به شکل زیر خواهد بود:

$$(23/9) \qquad \sum_{i=1}^{n} (y_{ir} - \overline{y}_r)(y_{ik} - \overline{y}_k) - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_{ir} - \overline{y})\sum_{i=1}^{n} (y_{ik} - \overline{y}_k)}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_{ir} y_{ik} - \overline{y}_r \sum_{i=1}^{n} y_{ik} - \overline{y}_k \sum_{i=1}^{n} y_{ir} + n\overline{y}_r\, \overline{y}_k - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} y_{ir} - n\,\overline{y}_r\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_{ik} - n\,\overline{y}_k\right]}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_{ir} \sum_{i=1}^{n} y_{ik} - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir} \sum_{i=1}^{n} y_{ik}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ik} \sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir} \sum_{i=1}^{n} y_{ik}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir} \sum_{i=1}^{n} y_{ik}}{n}$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ik} \sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir} \sum_{i=1}^{n} y_{ik}}{n} = \sum_{i=1}^{n} y_{ir}\, y_{ik} - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir} \sum_{i=1}^{n} y_{ik}}{n}$$

در صورتی که بخواهیم ماتریس S را از ماتریس Y محاسبه کنیم (۲۳/۹) را باید بکار بگیریم و در صورتی که بخواهیم از ماتریس X استفاده کنیم باید (۲۳/۸) را بکار بریم.

حال به جای ماکزیمم کردن تابع (۲۲) با توجه به محدودیت (۲۳) رابطه زیر را ماکزیمم می‌کنیم:

$$(24) \quad Max\ : U = \mathbf{a}'\mathbf{Sa}$$

$$(25) \quad S.To : \mathbf{a}'\mathbf{a} = 1$$

یا به شکل گسترده آن:

$$Max : U = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2m} \\ & & & \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \ldots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$(27)\qquad S.To:\ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_m \end{bmatrix} = 1$$

مسئلهٔ فوق همان مسئله قبل (۲۲) و (۲۳) است چون اگر رابطه (۲۶) را بسط دهیم به صورت زیر در خواهد آمد:

$$(28)\ V = \begin{bmatrix} a_{11}\,\sigma_{11} + a_2\,\sigma_{21} + \dots a_m\,\sigma_{m1}, a_{11}\,\sigma_{12} + a_2\,\sigma_{22} + \dots + a_m\,\sigma_{m2}, \dots, a_1\,\sigma_{1m} + a_2\,\sigma_{2m} + \dots a_m\,\sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$(29)\ U = a_1^2\,\sigma_{11} + a_1 a_2\,\sigma_{21} + \dots + a_1 a_m\,\sigma_{21} + a_1 a_2\,\sigma_{12} + a_2^2\,\sigma_{22} + \dots + a_m a_2 \sigma_{m2} + \dots + a_m a_1\,\sigma_{1m} + a_m a_2\,\sigma_{2m} + \dots a_m^2\,\sigma_{mm}$$

اگر مقادیر σ_{ij} را از (۲۳/۷) داخل (۲۹) بگذاریم روابط زیر بدست خواهد آمد:

$$(30)\ U = a_1^2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_{i1})^2}{n} \right] + a_1 a_2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i2} x_{i1} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i2} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}}{n} \right] + \dots + a_1 a_m \left[\sum_{i=1}^{n} x_{im} x_{i1} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{im} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}}{n} \right] +$$

$$a_2 a_1 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \sum_{i=1}^{n} x_{i2}}{n} \right] + a_2^2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_{i2})^2}{n} \right] + \dots + a_2 a_m \left[\sum_{i=1}^{n} x_{im} x_{i2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{im} \sum_{i=1}^{n} x_{i2}}{n} \right]$$

$$+ \dots + a_m a_1 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \sum_{i=1}^{n} x_{im}}{n} \right] + a_m a_2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \sum_{i=1}^{n} x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \sum_{i=1}^{n} x_{im}}{n} \right] + \dots + a_m^2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{im}^2 x_{i1} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_{im})^2}{n} \right]$$

$$(31)\ U = a_1^2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_{i1})^2}{n} \right] + a_2^2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_{i2})^2}{n} \right] + \dots + a_m^2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{im}^2 x_{i1} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_{im})^2}{n} \right]$$

$$+ 2a_1 a_2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \sum_{i=1}^{n} x_{i2}}{n} \right] + \dots + 2a_1 a_m \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}}{n} \right] + 2a_2 a_3 \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i2} x_{i3} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i2} \sum_{i=1}^{n} x_{i3}}{n} \right] +$$

$$+ \dots + 2a_2 a_m \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i2} x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i2} \sum_{i=1}^{n} x_{im}}{n} \right] + \dots + 2a_{(m-1)} a_m \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\,(m-1) x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\,(m-1) \sum_{i=1}^{n} x_{im}}{n} \right]$$

$$(32)\ U=\sum_{j=1}^{m} a_j^2\left[\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_{ij})^2}{n}\right]+2\sum_{j\prec k}^{m} a_j a_k\left[\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik}-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\sum_{i=1}^{n} x_{ik}}{n}\right]$$

واضح است که $\sum_{i=1}^{n} x_{ik} , \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ مساوی صفر هستند بدلیل اینکه انحراف از میانگین می‌باشند و مجموع آنان برابر با صفر است چون داشتیم:

$$(33)\quad x_{ij}=y_{ij}-\bar{y}_j$$

اگر از دو طرف $\sum_{i=1}^{n}$ بگیریم:

$$(34)\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=\sum_{i=1}^{n} y_{ij}-n\bar{y}_j$$

$$(35)\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=\sum_{i=1}^{n} y_{ij}-\frac{n\sum_{i=1}^{n} y_{ij}}{n}$$

$$(36)\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=0$$

پس اگر نتیجه (۳۶) را داخل (۳۲) بگذاریم تابع U به شکل زیر درمی‌آید:

$$(37)\ U=\sum_{j=1}^{m} a_j^2\left[\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2\right]+2\sum_{j\prec k}^{m} a_j a_k\left[\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik}\right]$$

$$(38)\ U=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_{ij}\right)^2$$

که همان تابع V (۱۹) است.

واضح است که محدودیت (۲۷) همان محدودیت (۲۳) می‌باشد. پس مسئله ما در اصل تفاوتی نکرده است حال برمی‌گردیم به حل مسئله (۲۶) با توجه به محدودیت (۲۷). برای پیدا کردن شعاع BC دوباره از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم شرط لازم را می‌نویسیم:

$$(39)\quad Max\ :L=\left[\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}+\lambda(1-\mathbf{a}'\mathbf{a})\right]$$

یا به طور گسترده :

$$(40)\quad Max\ :L=\left[a_1\ldots a_m\right]\begin{bmatrix}\sigma_{11}\ldots\sigma_{1m}\\ \vdots \\ \sigma_{m1}\ldots\sigma_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}+\lambda\left[1-\left[a_1\ldots a_m\right]\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}\right]$$

مشتق‌های جزئی را نسبت به $\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}$ و λ بدست می‌آوریم و آنها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$(41)\quad \frac{\delta L}{\delta\mathbf{a}}=2(\mathbf{S}\mathbf{a}-\lambda\mathbf{I}\mathbf{a})=\mathbf{o}$$

I و 0 ماتریس‌های واحد و صفر هستند با ابعاد mxm و mx۱

$$(42)\quad \frac{\delta L}{\delta \lambda} = (1-\mathbf{a}'\mathbf{a}) = 0$$

اگر از **a** رابطه (۴۱) فاکتور بگیریم می‌شود:

$$(42/1)\quad (\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{a}=\mathbf{0}$$

گسترده (۴۲/۱) به شکل زیر است:

$$(43)\quad \begin{bmatrix} \frac{\delta L}{\delta a_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta a_m} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 11 & \dots & 1m \\ \vdots & & \\ m1 & & mm \end{bmatrix} \right] - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 1 & \dots 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

شکل فوق به شرطی برقرار می‌شود که حداقل یکی از $(S-\lambda I)$ و یا a مساوی صفر شوند. به عبارت دیگر یا :

$$(44)\quad (\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I})=\mathbf{0}$$

و یا :

$$(45)\quad \mathbf{a}=\mathbf{0}$$

یا به عبارت دیگر :

$$(46)\quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

و

$$(47)\quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر شماره (۴۶) را ساده‌تر بنویسیم به شکل زیر در خواهد آمد.

$$(48)\quad \begin{bmatrix} (\sigma_{11}-\lambda) & \sigma_{12} & \sigma_{im} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22}-\lambda)\dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & (\sigma_{mm}-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

واضح است دستگاه (۴۲/۱) دستگاه معادلات همگن می‌باشد که دارای دو دسته جواب trivial و nontrivial می‌باشد دسته جواب trivial برابر با رابطه (۴۷) است ولی محدودیت (۲۷) را نادیده می گیرد اگر بخواهیم که جواب‌های nontrivial را بدست آوریم تا محدودیت ما هم برقرار باشد باید از رابطه (۴۴) یا (۴۸)

استفاده کنیم. طبق قضیه‌ای در جبر ماتریس‌ها داریم که اگر ماتریس A در سیستم معادلات همگن **AX=0** مربع از مرتبه n باشد سیستم معادلات همگن **AX=0** دارای دسته جواب nontrivial است اگر و فقط اگر ماتریس **A** مفرد (Singular) باشد یا به عبارت دیگر دترمینان ماتریس **A** مساوی صفر باشد[4] پس سیستم معادلات همگن $(\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{a}=\mathbf{0}$ دارای دسته جواب غیرصفر است اگر دترمینان ماتریس $(\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I})$ مساوی صفر باشد یا:

$$\det.(\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I})=0$$

یا :

$$(49)\ \det\begin{bmatrix}(\sigma_{11}-\lambda) & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{im}\\ \sigma_{21} & (\sigma_{22}-\lambda) & \cdots & \sigma_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & (\sigma_{mm}-\lambda)\end{bmatrix}=0$$

حل مسائلی از قبیل فوق در جبر ماتریس‌ها بنام مسائل eigenvalue شناخته شده است صورت مسئله این است که دستگاه (۴۲/۱) را داریم مقادیر اسکالرهای λ و بردار غیر صفر **a** را پیدا کنید بطوریکه :

$$(50)\quad \mathbf{Sa}=\lambda\mathbf{a}$$

برای هر اسکالر λ و بردار غیر صفر **a** که درون معادله (۵۰) صادق است λ را eigenvaueی **S** و **a** را eigenvector, S نسبت به λ می‌نامیم. واژه‌های Characteristic value (یا Characteristic root) و Characteristic vector نیز به ترتیب همچنین برای λ و **a** به کار برده می‌شود (ریشه یا مقدار کرکتریستیک و بردار کرکتریستیک).

حال دوباره معادله (۴۲/۱) را در نظر می‌گیریم همانطور که گفته شد دستگاه مذکور دارای یک دسته جواب‌های غیر صفر nontrivial است اگر شرط (۴۹) برقرار باشد. اگر دترمینان (۴۹) را حساب کنیم به یک پولینومیال (Polynomial) از درجه m بر حسب λ خواهیم رسید:

$$(51)\quad |\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I}|=(-1)^m\lambda^m+\beta_{m-1}\lambda^{m-1}+\beta_{m-2}\lambda^{m-2}+\ldots+\beta_1\lambda+\beta_o$$

پولی نومیال فوق به نام پولی نومیال کرکتریستیکِ (Characteristic Polynomial) S نامیده می‌شود. هر مقداری از λ که در معادله (۴۹) صادق باشد منتج به ایجاد یک دستگاه معادلات همگن از نوع (۴۲/۱) می‌شود. بدین ترتیب مسئله پیدا کردن مقدار λ به ترتیبی که (۴۲/۱) جواب‌های nontrivial داشته باشد مانند این است که ریشه‌های پولی نومیال کرکتریستیک زیر را پیدا کنیم.

$$(52)\quad (-1)^m\lambda^m+\beta_{m-1}\lambda^{m-1}+\beta_{m-2}\lambda^{m-2}+\ldots+\beta_1+\beta_o=0$$

قضیه اصلی جبر تضمین می‌کند که معادله (۵۲) m ریشه (نه لزوماً متمایز) دارد که بعضی از آنها ممکن است مختلط (Complex) باشند. پس باید (۵۲) را حل کرده به جواب‌های آن برسیم. ریشه‌های کرکتریستسک (Characteristis root) آن را بدست آوریم $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$. طبق قضیه‌ای در جبر ماتریس‌ها داریم که: اگر

[4]– Computational Matrix Algebra (1974), David I . Steinberg Mc Graw Hill; Theorem 6-9, p. 153.

ماتریسی که دترمینان آن پولی نومیال کرکتریستیک می‌شود قرینه بوده (یعنی $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ و تمام عناصر آن حقیقی (real) باشند، تمام ریشه‌های کرکتریستسک آن پولی نومیال نیز حقیقی هستند.[5] از طرفی دیگر باز طبق قضیهٔ [6] دیگری اگر ماتریسی Positive–definite باشد ریشه‌های کرکتریستیک آن (eigenvalues) همه مثبت هستند.

با استفاده از قضیه‌های فوق نتیجه می گیریم که تمام eigenvalue های ما مثبت و حقیقی هستند. و با داشتن این امر می‌توانیم ساده‌ترین روش را از میان روش‌های محاسبه ریشه‌های پنهان انتخاب کنیم روش‌های زیادی برای بدست آوردن eigenvalue ها $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ و eigenvector ها $(a_1, a_2, ..., a_m)$ وجود دارد از جمله[۷]:

۱- پیدا کردن حد فواصل eigenvalue ها با استفاده از دیسک گرشگورین (Greschgorin)

۲- روش توان (Power Method)

۳- روش توان و دیفلاسیون (Deflation and Power Method)

۴- روش ژاکوبی (Jacobi’s Method)

۵- روش گیونز (Givens Method)

۶- روش هاوزهولدر (Householder’s Method)

۷- الگوریتم LR (LR Algorithm)

۸- الگوریتم QR (QR Algorithm)

با توجه به نکات یاد شده روش‌های مذکور در فوق بهترین و ساده‌ترین روش، روش توان به نظر می‌رسد که توسط آن می‌توانیم بزرگترین مقدار قدر مطلق eigenvalue ها را پیدا کنیم. در این روش پرینسیپال کامپونتزها احتیاج به بزرگترین مقدار eigenvalue داریم و چون تمام eigenvalue ها مثبت و حقیقی هستند روش توان برای بدست آوردن بزرگترین eigenvalue (Principal eigenvalue) از همه مناسب‌تر به نظر می‌رسد.

حال سعی می کنیم که روش توان را برای یک ماتریس مربع با بعاد mxm که قرینه بوده و دارای ریشه‌های کرکتریستیک مثبت و حقیقی باشد توضیح دهیم. از آنجائیکه ماتریس **S** نیز حقیقی و قرینه می‌باشد eigenvalue های **S** نیز حقیقی هستند و **S** دارای n و eigenvector مستقل خطی می‌باشد که آنها را با $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m$ مشخص می کنیم که $\mathbf{a}_j$ یک eigenvector در رابطه با λ_j می‌باشد j=1,2,…m

[5] Maxima and Minima; theory and economic applications R. Frisch; Dordrecht, Holland, 1966; theorem 13. 60, p. 164.

[6]–Computational Matrix algebra, D.I. Steinberg, Mc Graw hill, 1974.

[7] Applied numerical methods, Carnahan, Brice, H.A. Luther & James O. Wilkes Wiley, New York, 1969.
Computer solution of linear algebraic systems; Forsythe , George & Cleve B. Moler, Printice Hall, Englewood cliffs N.J. 1967.
Matrix theory, Franklin J.N. Printice Hall, Englewood, cliffs, N.J.1968.
Introduction to numerical analysis, Froberg C.E. Addison – Wesley reading Mass. 1969.
Isaacson, E. & Keller H.B. Analysis of numerical methods Wiley N.Y. 1966.
J. H. Wilkinson, The algebraic eigenvalue problem, Oxford University press, London 1965.
Computational Matrix Algebra, D.I. Steinberg, Mc Graw hill, 1974.

$\mathbf{Sa}_j = \lambda \mathbf{a}_j$ بدین ترتیب این m ، eigenvector یک پایه (basis) برای مجموعه همه m مؤلفه‌های بردارها تشکیل می‌دهد. یا به عبارت دیگر با هر برداری مانند $\mathbf{W}_0$ یک مجموعه واحدی از اسکالرهای $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ وجود دارد بطوریکه:

$$(53) \quad W_o = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + ... + \gamma_m a_m = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j a_j$$

حال یک بردار دلخواه غیر صفر $\mathbf{W}_0$ را در نظر می‌گیریم و بردارهای $\mathbf{W_1}, \mathbf{W_2}, ..., \mathbf{W_k}, ...$ را بر طبق فرمول‌های زیر بدست می‌آوریم:

$$W_1 = SW_o$$
$$W_2 = SW_1 = S^2 W_o$$
$$W_3 = SW_2 = S^2 W_1 = S^3 W_o$$
$$\vdots$$
$$(54)\ W_k = SW_{k-1} = S^2 W_{k-2} =, ..., S^k W_o$$

اگر شکل بالا را به صورت باز بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \\ \vdots \\ W_{1m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \ldots \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \ldots \sigma_{2m} \\ \vdots & \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} \ldots \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{01} \\ W_{02} \\ \vdots \\ W_{om} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_{21} \\ W_{22} \\ \vdots \\ W_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \ldots \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \ldots \sigma_{2m} \\ \vdots & \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} \ldots \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \\ \vdots \\ W_{1m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \ldots \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \ldots \sigma_{2m} \\ \vdots & \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} \ldots \sigma_{mm} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} W_{01} \\ W_{02} \\ \vdots \\ W_{om} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_{31} \\ \vdots \\ W_{3m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \\ \sigma_{m1} & \ldots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{21} \\ \vdots \\ W_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \\ \sigma_{m1} & \ldots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} W_{11} \\ \vdots \\ W_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \\ \sigma_{m1} & \ldots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} W_{01} \\ \vdots \\ W_{om} \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(55) \begin{bmatrix} W_{k1} \\ \vdots \\ W_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \\ \sigma_{m1} & \ldots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{k-1},1 \\ \vdots \\ W_{k-1},m \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \\ \sigma_{m1} & \ldots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} W_{01} \\ \vdots \\ W_{om} \end{bmatrix}$$

اگر (۵۴) یا (۵۵) را داخل (۵۳) بگذاریم :

$$(56)\qquad W_k = S^k \left\{ \sum_{j=1}^{m} \gamma_j\, a_j \right\} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j S^k a_j$$

از آنجائیکه : $j = 1,2,...,m, S^k a_j = \lambda_j^k\, a_j$ معادله (۵۶) به شکل زیر درمی‌آید:

$$(57)\quad W_k = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \lambda_j^k\, a_j$$

اگر دو طرف ۵۷ را به اسکالر $\frac{1}{\lambda_1^k}$ تقسیم کنیم:

$$(58)\qquad (\frac{1}{\lambda_1^k}) W_k = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j\, (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k\, a_j = \gamma_1 a_1 + \sum_{j=2}^{m} \gamma_j\, (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k\, a_j$$

چون فرض کرده‌ایم که λ_1 بزرگترین مقدار λ_j ها باشد $j = 1,...,m$, $\lambda_1 \succ \lambda_j$ وقتی که k افزایش می‌یابد جمله‌ای که در سمت راست (۵۸) است کوچکتر و کوچکتر می‌شود پس اگر حد (۵۸) را بگیریم به طوری که k به سمت بی نهایت میل کند:

$$(59)\quad Lim_{k\to\infty} \left\{ (\frac{1}{\lambda_1^k}) W_k \right\} = Lim_{\,k\to\infty} \left\{ \gamma_1\, a_1 + \sum_{j=2}^{m} \gamma_j\, (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k\;\; a_j \right\} = \gamma_1 a_1$$

پس حد (۵۸) وقتی که k به سمت بی نهایت میل کند برابر خواهد شد با S, eigenvector نسبت به λ_1. حال باید ببینیم که چگونه می‌توان از نتیجه فوق در جهت محاسبه λ_1 استفاده کرد ماتریس‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm})^T$

,

$W_k = (W_{k1}, W_{k2}, ..., W_{km})^T$

که T علامت ترانسپوز می‌باشد. با استفاده از معادله (۵۷) می‌توان نوشت:

$$(60)\qquad W_{kp} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j\; \lambda_j^k\; a_{jp} \qquad P = 1, 2, ..., m$$

برای مؤلفه‌های W_{k+1} دوباره از (۵۷) استفاده می‌کنیم:

$$(61)\quad W_{k+1,p} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j\, \lambda_j^k\; a_{jp}$$

حالا برای هر P که $W_{kp} \neq 0$ نسبت زیر را با استفاده از (۶۰) و (۶۱) محاسبه می‌کنیم:

$$(62)\quad \frac{W_k + 1, p}{W_{kp}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \lambda_j^{k+1} a_{jp}}{\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \lambda_j^k a_{jp}} = \frac{\gamma_1 \lambda_1^{k+1} a_{1p} + \sum_{j=2}^{m} \gamma_j\, \lambda_j^{k+1}\, a_{jp}}{\gamma_1\, \lambda_1^k\; a_{1p} + \sum_{j=2}^{m} \gamma_j\; \lambda_j^k\; a_{jp}} =$$

$$\frac{\lambda_1^{k+1} \left[\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^{m} \gamma_j\; (\lambda_j / \lambda_1)^{k+1}\, a_{jp} \right]}{\lambda_1^k \left[\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^{m} \gamma_j\; (\lambda_j / \lambda_1)^k\;\; a_{jp} \right]} = \lambda \frac{\left[\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^{m} \gamma_j\; (\lambda_j / \lambda_1)^{k+1}\, a_{jp} \right]}{\left[\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^{m} \gamma_j\; (\lambda_j / \lambda_1)^k\;\; a_{jp} \right]}$$

حال اگر از نتیجه حاصل در (۶۲) حد بگیریم وقتی که k به سمت بی نهایت میل می‌کند:

$$(63)\quad Lim_{k\to\infty}\left\{\frac{W_{k+1,p}}{W_{kp}}\right\}=Lim_{k\to\infty}\left\{\lambda_1\frac{\gamma_1 a_{1p}+\sum_{j=2}^{m}\gamma_j(\lambda_j/\lambda_1)^{k+1}a_{jp}}{\gamma_1 a_{1p}+\sum_{j=2}^{m}\gamma_j(\lambda_j/\lambda_1)^{k}\ a_{jp}}\right\}=\lambda_1$$

با استفاده از (۶۳) حالا رابطه‌ای داریم که قابل محاسبه می‌باشد و آن نسبت ارائه شده در (۶۳) است که اگر k به اندازه کافی بزرگ باشد مقدار کسر (۶۳) به سمت λ_1 میل می‌کند. برای اینکه معین شود که مقدار k چقدر افزایش یابد که کفایت رابطه (۶۳) را بکند باید هر دفعه بردار W_{k+1} و پس از آن نسبت $W_{k+1,p}/W_{kp}$ محاسبه شود. هر وقت که تمام این نسبت‌ها تقریباً درون حدود قابل قبولی از لحاظ تفاوت (مثلاً تا ۴ رقم اعشار) واقع شدند دیگر لزومی به افزایش k نیست. در این زمان بردار W_{k+1} (آخرین مقادیر محاسبه شده) در واقع یک eigenvector نسبت به λ_1 خواهد بود. و از معادله (۶۳) داریم:

$$W_{k+1}\approx\lambda_1 W_k$$

و با تعریف بیان شده داریم که:

$$W_{k+1}=SW_k$$

یک جزء محاسباتی دیگر که باید ذکر شود عبارت از این است که در محاسبه بردارهای W_k باید در نظر داشت که در معادله (۵۷) اگر λ_1 بزرگتر از یک باشد سمت راست معادله (۵۷) و بدین ترتیب مؤلفه‌های W_k در موقع افزایش k افزایش بیشتری دارد. به عبارت دیگر $\lambda_1 \prec 1$ باشد این جمله در موقع افزایش k به سمت صفر میل می‌کند. برای اینکه از این مشکل محاسباتی اجتناب شود تغییرات زیر را بکار می‌گیریم: علی رغم محاسبه بردارهای $W_k,\ldots,W_1,W_0$ بردارهای $\hat{W}_0,\hat{W}_1,\ldots,\hat{W}_k$ را نیز محاسبه می‌کنیم بطوری که:

$$(64)\qquad \hat{W}_k=\mu_k W_k$$

$$(65)\qquad \mu_k=1/\left\{\max_{0=1,2,\ldots,m}\left[\left|W_{kp}\right|\right]\right\}$$

$$(66)\qquad W_{k+1}=S\hat{W}_k$$

بنابراین مؤلفه‌های بردارهای $\hat{W}_k,\hat{W}_{k+1}$ همیشه کوچکتر یا مساوی یک هستند و حداقل یکی از آنها مساوی یک خواهد بود بنابراین مشکل مذکور در پاراگراف قبل از بین می‌رود. ضمناً باید بخاطر داشت الان نسبت مؤلفه‌های W_{k+1} به W_k را برای محاسبه λ_1 باید به کار برد نه نسبت مؤلفه‌های W_{k+1} , $\hat{W}_{k+1}$.

حالا روش توان عنوان شده را برای محاسبه λ_1 خلاصه می‌کنیم:

۱- بردار دلخواه W_0 را انتخاب نموده و k را مساوی یک قرار می‌دهیم.

۲- عبارت $\hat{W}_k=\mu_k W_k$ را با استفاده از معادله (۶۵) حساب نموده سپس $W_{k+1}=S\hat{W}_k$ را محاسبه می‌کنیم.

۳- برای هر $\hat{W}_{kp}$ غیر صفر (P=1, 2 , …, m) نسبت زیر را حساب می‌کنیم:

$$(67) \qquad r_p = (W_{k+1,p}) / (\hat{W}_{kp})$$

۴- نسبت‌های r_p را که در قدم ۳ محاسبه شده است مقایسه می کنیم. اگر همه آنها تقریباً مساوی بودند (یا درون فاصله مورد نظر از لحاظ صحت واقع شدند) سپس:

$$(68) \qquad \lambda_1 = r_p$$

$$(69) \qquad a_1 = W_{k+1}$$

باشد و روش به پایان می‌رسد. اگر این نسبت‌ها تقریباً مساوی نبودند k را یک واحد اضافه می کنیم و به قدم دوم بر می گردیم. نکته‌ای که قابل ذکر است این است که تعداد حلقه‌های محاسباتی فوق بستگی شدید به انتخاب بردار W_0 دارد ولی هنوز معیاری در دست نیست که بتوان از قبل تعیین کرد که بردار W_0 چه باشد که درجهٔ همگرایی (Convergence ratio) روش توان بیشتر شود.

حال به طریق فوق مقدار λ_1 یا بزرگترین eigenvalue نسبت به S را پیدا می کنیم. اگر از روش‌های دیگر به دنبال eigenvalue های S می گشتیم پس از بدست آوردن آنها باید eigenvector مربوط به λ_1 را نیز پیدا کنیم. ولی روش توان خود eigenvector مربوط به بزرگترین eigenvalue را هم ارائه می‌دهد مانند معادله (۶۹).

Eigenvector پیدا شده a_1 نسبت ب بزرگترین ریشه پنهان (eigenvalue) یا λ_1 را درون دستگاه معادلات زیر بگذاریم مؤلفه‌های اصلی یا پرینسیپال کامپوننتز برای n شهرستان بدست می‌آیند:

$$(70) \qquad Z_1 = a_1\, y_{11} + a_2\, y_{12} + a_3\, y_{13} + \ldots + a_m\, y_{1m}$$

$$(71) \qquad Z_2 = a_1\, y_{21} + a_2\, y_{22} + a_3\, y_{13} + \ldots + a_m\, y_{2m}$$

$$(72) \qquad Z_3 = a_1\, y_{31} + a_2\, y_{32} + a_3\, y_{33} + \ldots + a_m\, y_{3m}$$

....

....

$$(73) \qquad Z_n = a_1\, y_{n1} + a_2\, y_{n2} + a_3\, y_{n3} + \ldots + a_m\, y_{nm}$$

معادلات (۷۰) تا (۷۳) را به شکل زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$(74) \quad \mathbf{Z} = \mathbf{y}a$$

متغیرهای جدید Z_1 تا Z_n از دستگاه فوق بدست می‌آیند قسمت اعظم واریانس توزیع Y را تشریح نموده و متغیرهای اصلی را با حداقل کاهش اطلاعات بیان می‌نمایند. حالا برمی گردیم به نکته‌ای که قبلاً اشاره شد در اول فرض کردیم که تمام مقیاس‌های متغیرهای به کار گرفته شده در ماتریس (الف) یا Y باید یکسان باشند تا بتوانیم از روش ماتریس S یا ماتریس واریانس کواریانس استفاده کنیم اگر مقیاس‌ها مساوی نبود در

مسئله (۲۴) یا (۲۶) به جای ماتریس واریانس – کواریانس ماتریس همبستگی R را به کار می‌بریم. ماتریس R نیز ماتریسی است مربع بابعاد mxm و نسبت به قطر اصلی آن قرینه بوده و قطر اصلی آن برابر با یک می‌باشد:

$$(74)\qquad R=\begin{bmatrix}1 & \rho_{12} & \rho_{13}\ldots\rho_{1m}\\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23}\ldots\rho_{2m}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1\ldots\rho_{3m}\\ \vdots & & \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \rho_{m3}\ldots1\end{bmatrix}$$

وقتی $r\neq k$ باشد $\rho_{rk}=\rho_{kr}$ و وقتی r=k باشد $\rho_{rk}=1$. مقادیر ρ_{rk}.از فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

$$(75)\qquad \rho_{rk}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_{ir}\,y_{ik}-\frac{\sum_{i=1}^{n}y_{ir}\sum_{i=1}^{n}y_{ik}}{n}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}y_{ir}^{2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}y_{ir})^{2}}{n}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}y_{ik}^{2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}y_{ik})^{2}}{n}\right]}}$$

صورت کسر (۷۵) معادل کواریانس (y_r , y_k) می‌باشد ($Cov(y_r , y_k)$) که همان σ_{rk} در ماتریس (ج) یا ماتریس S می‌باشد یا به عبارت دیگر همان فرمول (۲۳/۶) است. مخرج کسر (۷۵) برابر با واریانس y_r و واریانس y_k می‌باشد که می‌توان ρ_{rk} را به شکل زیر نوشت:

$$(76)\qquad \rho_{rk}=\frac{Cov(y_r , y_k)}{\sqrt{Var(y_r)Var(y_k)}}$$

تعریف دیگری که از (۷۶) می‌توانیم بکنیم این است که σ_{rk} ماتریس (ج) یا ماتریس S (ماتریس واریانس– کواریانس) را نرمال کرده‌ایم. البته خواص ریاضی آنالیز پرینسیپال کامپوننتز در زمانی که ماتریس R (ماتریس همبستگی) بکار برده می‌شود با زمانی که ماتریس S (ماتریس واریانس– کواریانس) استفاده می‌شود یکسان نیست ولی به هر حال به این شکل مکرراً مورد استفاده قرار می‌گیرد.

روش دیگری که می‌توانیم اتخاذ کنیم تا مقیاس‌های متفاوت را از بین ببریم این است که از اول ماتریس Y را استاندارد کنیم.[۸] برای این کار اول میانگین هر ستون از ماتریس Y را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{y}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\; y_{ij}$$

سپس انحراف معیار هر ستون از ماتریس Y را محاسبه می‌کنیم:

[8] – برای توضیح کامل روش استاندارد کردن می‌توان رجوع کرد به : آنالیز تکسونومی (روش طبقه‌بندی گروه‌های همگن) و کاربرد آن در طبقه‌بندی شهرستان‌ها و ایجاد شاخص‌های توسعه جهت برنامه‌ریزی منطقه‌ای، سازمان برنامه و بودجه استان مرکزی (اراک) بیژن بیدآباد، تیرماه ۱۳۶۲.

$$Sd_j=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_j)^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_{ij}^2}{n}}$$

با در دست داشتن میانگین و انحراف معیار هر ستون از ماتریس Y ماتریس D را ب ابعاد nxm تشکیل می‌دهیم به طوری که هر عضو آن برابر با فرمول زیر باشد:

$$D_{ij}=\frac{y_{ij}-\bar{y}_j}{sd_j}$$

واضح است که صورت کسر فوق اعضاء ماتریس X را تشکیل می‌دهند پس:

$$D_{ij}=\frac{x_{ij}}{sd_j}$$

ماتریس D به شکل زیر خواهد بود:

$$D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1m} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2m} \\ \vdots & & & \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{x_{11}}{sd_1} & \frac{x_{12}}{sd_2} & \dots & \frac{x_{1m}}{sd_m} \\ \frac{x_{21}}{sd_1} & \frac{x_{22}}{sd_2} & \dots & \frac{x_{2m}}{sd_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{x_{n1}}{sd_1} & \frac{x_{n2}}{sd_2} & \dots & \frac{x_{nm}}{sd_m} \end{bmatrix}$$

حال یک سری نکات اساسی برای استفاده علمی این روش را باید یادآور شویم در درجه اول باید به خاطر داشت که تمام m متغیرها یا خصوصیت‌های ما باید طوری انتخاب شوند که توسعه یافتگی یک تابع افزاینده از آن متغیر باشد. مثلاً می‌توان توسعه یافتگی را یک تابع افزاینده از تعداد تخت‌های بیمارستانی دانست ولی یک تابع کاهنده از بیماری‌های ناشی از سؤ تغذیه دانست. در صورتی که توسعه یافتگی تابع کاهنده‌ای از یک خصوصیت بود می‌توان تمام اطلاعات مربوط به آن خصوصیت را که در ستون jام ماتریس Y قرار می‌گیرند از اول معکوس کرد و بعد محاسبات بعدی را شروع نمود. واضح است که در آخر کار محاسبات که به بردار Z خواهیم رسید. هر شهرستانی که z آن بزرگتر بودتوسعه یافته‌تر از شهرستان‌های دیگر می‌باشد.

عملیات لازم برای محاسبه پرینسیپال کامپوننتز به طور خلاصه در زیر آورده شده است:

۱- ماتریس Y را تشکیل می‌دهیم.
۲- ماتریس X را با استفاده از Y محاسبه می‌کنیم
۳- ماتریس S و یا R را با استفاده از X محاسبه می‌نمائیم.
۴- Eigenvector S یا R را نسبت به بزرگترین eigenvalue محاسبه می‌کنیم.
۵- بردار حاصل از ۴ را در معادله Z=Ya می‌گذاریم و مقادیر Z را حساب می‌کنیم.

برای واضح‌تر شدن روش بدست آوردن مؤلفه‌های اصلی یک مثال ساده آورده شده است در اینجا شهرستان‌های استان مرکزی را از لحاظ وضعیت آموزش و پرورش مورد بررسی قرار می‌دهیم.

شهرستان‌های استان مرکزی به شرح زیر می‌باشند:

الف :	اراک	د :	آشتیان	ز:	قم
ب :	سربند	ه:	خمین	ح:	محلات
ج :	تفرش	و:	ساوه	ط:	دلیجان

آمارهای بکار گرفته شده در مسئله نمونه عبارتند از:

۱- تعداد کل کلاس‌های آموزشگاه‌های دانش‌آموزان استثنائی شهرستان تقسیم بر کل جمعیت ۱۷ – ۶ ساله شهرستان

۲- تعداد کل کلاس‌های مدارس ابتدائی تقسیم بر کل جمعیت ۱۰ – ۶ ساله شهرستان

۳- تعداد کل کلاس‌های مدارس راهنمایی تحصیلی تقسیم بر کل جمعیت ۱۳ – ۱۱ ساله شهرستان

۴- تعداد کل کلاس‌های دبیرستان‌های متوسطه عمومی تقسیم بر کل جمعیت ۱۷ – ۱۴ ساله شهرستان

۵- تعداد کل کلاس‌های هنرستان‌های فنی تقسیم بر کل جمعیت ۱۷ – ۱۴ ساله شهرستان

۶- تعداد کل کلاس‌های مدارس بازرگانی و حرفه‌ای تقسیم بر کل جمعیت ۱۷ – ۱۴ ساله شهرستان

۷- تعداد کل کلاس‌های مدارس دوره عمومی تقسیم بر کل جمعیت ۱۷ – ۶ ساله شهرستان

۸- تعداد کل کلاس‌های مدارس دوره تکمیلی تقسیم بر کل جمعیت ۱۷ – ۶ ساله شهرستان

منابع آماری:

- آمار آموزش و پرورش استان مرکزی (اراک) سال ۶۲ – ۶۱ اداره کل آموزش و پرورش استان مرکزی (اراک)
- آمار جمعیت لازم التعلیم شهرستان های کشور برای سال ۱۳۶۲ منتج از سرشماری عمومی ۱۳۵۵ مرکز آمار ایران – مرکز آمار ایران

ماتریس Y_{ij} جدول ۱

خصوصیت شهرستان	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)
اراک	۰/۰۱۵	۳/۷۹۳	۲/۱۶۰	۰/۸۶۸	۰/۰۸۸	۰/۰۳۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۱
سربند	۰	۳/۶۵۸	۰/۷۵۹	۰/۲۲۴	۰/۰۴۳	۰	۰/۰۰۶	۰
تفرش	۰/۰۱۰	۵/۴۸۹	۲/۲۲۲	۱/۰۱۹	۰/۱۲۹	۰/۰۱۸	۰	۰
آشتیان	۰	۵/۵۴۶	۲/۲۸۰	۰/۷۶۷	۰	۰	۰	۰
خمین	۰/۰۲۷	۴/۴۳۳	۱/۷۶۸	۰/۶۰۸	۰/۰۶۲	۰/۰۲۵	۰/۰۱۰	۰/۰۲۰
ساوه	۰/۰۱۳	۴/۵۱۷	۰/۰۳۸	۰/۶۶۵	۰/۰۹۲	۰/۰۱۴	۰/۰۰۸	۰/۰۱۰
قم	۰	۳/۰۵۰	۱/۷۰۶	۰/۴۹۲	۰/۰۵۰	۰/۰۱۸	۰/۰۱۴	۰/۰۱۸
محلات	۰	۰/۵۵۰	۲/۷۰۹	۱/۲۹۲	۰/۲۵۸	۰/۰۳۲	۰/۰۲۰	۰
دلیجان	۰	۴/۸۹۳	۲/۴۴۹	۱/۱۷۴	۰	۰	۰/۰۲۴	۰/۰۴۸
$\sum_{I=1}^{9} Y ij$	۰/۰۶۵	۴۰/۹۲۸	۱۷/۰۹۱	۷/۱۰۹	۰/۷۲۲	۰/۱۴۱	۰/۱۰۶	۰/۱۱۷
$\bar{y}_j$	۰/۰۰۷	۴/۵۴۷	۱/۸۹۹	۰/۷۹۰	۰/۰۸۰	۰/۰۱۶	۰/۰۱۲	۰/۰۱۳

برای صحت بیشتر همه نسبت‌ها در ۱۰۰ ضرب شده‌اند.

ماتریس X_{IJ} جدول ۲

خصوصیت شهرستان	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)
اراک	۰/۰۰۸	−۰/۷۵۴	۰/۲۶۱	۰/۰۷۸	۰/۰۰۸	۰/۰۱۸	۰/۰۱۲	۰/۰۰۸
سربند	−۰/۰۰۷	−۰/۸۸۹	−۱/۱۴۰	−۰/۵۶۶	−۰/۰۳۷	−۰/۰۱۶	−۰/۰۰۶	−۰/۰۱۳
تفرش	۰/۰۰۳	۰/۹۴۲	۰/۳۲۳	۰/۲۲۹	۰/۰۴۹	۰/۰۰۲	−۰/۰۱۲	−۰/۰۱۳
آشتیان	−۰/۰۰۷	۰/۹۹۹	۰/۳۸۱	−۰/۰۲۳	−۰/۰۸	−۰/۰۱۶	−۰/۰۱۲	−۰/۰۱۳
خمین	۰/۰۲۰	−۰/۱۱۵	−۰/۱۳۱	−۰/۱۸۲	−۰/۰۱۸	۰/۰۰۹	−۰/۰۰۲	۰/۰۰۷
ساوه	۰/۰۰۶	−۰/۰۳	−۰/۸۶۱	−۰/۱۲۵	۰/۰۱۲	−۰/۰۰۲	−۰/۰۰۴	−۰/۰۰۳
قم	−۰/۰۰۷	−۱/۴۹۷	−۰/۱۹۳	−۰/۲۹۸	−۰/۰۳۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۵
محلات	−۰/۰۰۷	۱/۰۰۳	۰/۸۱۰	۰/۵۰۲	۰/۱۷۸	۰/۰۱۶	۰/۰۰۸	−۰/۰۱۲
دلیجان	−۰/۰۰۷	۰/۳۴۶	۰/۵۵۰	۰/۳۸۴	−۰/۰۸۰	−۰/۰۱۶	۰/۰۱۲	۰/۰۳۵

ماتریس (S) واریانس – کواریانس جدول ۳

	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)
(۱)	۰/۰۰۰۷۵	۰/۰۰۸۶۲	−۰/۰۰۷۵۸	−۰/۰۰۳۰۷	۰/۰۰۰۲۷	۰/۰۰۰۵۳	−۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۱۴
(۲)	۰/۰۰۸۶۲	۶/۶۲۵۰۶	۳/۲۲۷۶۸	۱/۷۴۴۲۶	−۰/۱۶۶۴۹	−۰/۰۰۶۹۰	−۰/۰۱۷۴۷	−۰/۰۲۸۸۴
(۳)	−۰/۰۰۷۵۸	۳/۲۲۷۶۸	۳/۳۷۱۵۴	۱/۵۳۷۶۰	۰/۱۲۷۶۱	۰/۰۲۱۸۰	۰/۰۱۷۹۲	۰/۰۱۷۱۸
(۴)	−۰/۰۰۳۰۷	۱/۷۴۴۲۶	۱/۵۳۷۶۰	۰/۹۱۶۴۲	۰/۱۰۳۹۸	۰/۰۱۱۱۹	۰/۰۰۶۷۴	۰/۰۰۹۸۳
(۵)	۰/۰۰۰۲۷	−۰/۱۶۶۴۹	۰/۱۲۷۶۱	۰/۱۰۳۹۸	۰/۰۲۹۶۹	۰/۰۰۶۰۰	۰/۰۰۱۰۸	−۰/۰۰۴۴۸
(۶)	۰/۰۰۰۵۳	−۰/۰۰۶۹۰	۰/۰۲۱۸۰	۰/۰۱۱۱۹	۰/۰۰۶۰۰	۰/۰۰۱۴۴	۰/۰۰۰۴۱	−۰/۰۰۰۱۵
(۷)	−۰/۰۰۰۰۳	−۰/۰۱۷۴۷	۰/۰۱۷۹۲	۰/۰۰۶۷۴	۰/۰۰۱۰۸	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۰۷۰	−۰/۰۰۰۸۱
(۸)	۰/۰۰۰۱۴	−۰/۰۲۸۸۴	۰/۰۱۷۱۸	۰/۰۰۹۸۳	−۰/۰۰۴۴۸	−۰/۰۰۰۱۵	۰/۰۰۰۸۱	۰/۰۰۲۰۵

بردار انتخابی و دور محاسباتی اول – جدول ۴ $\mu_1 = 1/$(۱۱۳۸۵۹۲)

w_O		**W_1**	
W_{01}	۱۰۰۰۰۰	W_{11}	−۳۷
W_{02}	۱۰۰۰۰۰	W_{12}	۱،۱۳۸،۵۹۲
W_{03}	۱۰۰۰۰۰	W_{13}	۸۳۱،۳۷۵
W_{04}	۱۰۰۰۰۰	W_{14}	۴۳۲،۶۹۵
W_{05}	۱۰۰۰۰۰	W_{15}	۴۵،۰۶۴
W_{06}	۱۰۰۰۰۰	W_{16}	۳،۴۳۲
W_{07}	۱۰۰۰۰۰	W_{17}	۱،۰۱۶
W_{08}	۱۰۰۰۰۰	W_{18}	−۳۰۶

دور محاسباتی دوم – جدول ۵ (۹/۶۳۸۱۰)/۱ = μ_2

R_p	W_2		W_1	
۶۴/۳۳۳۳۳–	۰/۰۰۱۹۳	W_{21}	۰/۰۰۰۰۳–	W_{11}
۹/۶۳۸۱۰	۹/۶۳۸۱۰	W_{22}	۱	W_{12}
۸/۵۹۹۲۱	۶/۲۷۸۹۷	W_{23}	۰/۷۳۰۱۸	W_{13}
۸/۴۷۱۴۳	۳/۲۱۹۴۰	W_{24}	۰/۳۸۰۰۳	W_{14}
۰/۸۰۳۶۹–	۰/۰۳۱۸۱–	W_{25}	۰/۰۳۹۵۸	W_{15}
۴/۴۸۸۳۷	۰/۰۱۳۵۱	W_{26}	۰/۰۰۳۰۱	W_{16}
۲/۰۰۰۰۰–	۰/۰۰۱۷۸–	W_{27}	۰/۰۰۰۸۹	W_{17}
۴۵/۷۰۳۷۰	۰/۰۱۲۳۴–	W_{28}	۰/۰۰۰۲۷–	W_{18}

دور محاسباتی سوم – جدول ۶ (۹/۳۱۱۰۱)/۱ = μ_3

R_p	W_3		W_2	
۱۳/۲۸۱۰۵	۰/۰۰۲۶۶	W_{31}	۰/۰۲۰۰۰	W_{21}
۹/۳۱۱۰۱	۹/۳۱۱۰۱	W_{32}	۱	W_{22}
۹/۱۱۳۷۴	۵/۹۳۷۳۳	W_{33}	۰/۶۵۱۴۷	W_{23}
۹/۱۳۶۰۹	۳/۰۵۱۷۳	W_{34}	۰/۳۳۴۰۳	W_{24}
۱۴/۷۷۹۸۵	۰/۰۴۸۷۷–	W_{35}	۰/۰۰۳۳۰–	W_{25}
۷/۸۷۳۰۰	۰/۰۱۱۰۲	W_{36}	۰/۰۰۱۴۰	W_{26}
۱۹/۷۱۳۳۳	۰/۰۰۳۵۵–	W_{37}	۰/۰۰۰۱۸–	W_{27}
۱۱/۲۱۲۸۱	۰/۰۱۴۳۵–	W_{38}	۰/۰۰۱۲۸–	W_{28}

دور محاسباتی چهارم – جدول ۷ μ_4 = ۱/(۹/۲۵۵۸۵)

W_3		W_4		R_p
W_{31}	۰/۰۰۰۲۸	W_{41}	۰/۰۰۲۷۸	۹/۹۲۶۷۵
W_{32}	۱	W_{42}	۹/۲۵۵۸۵	۹/۲۵۵۸۵
W_{33}	۰/۶۳۷۶۷	W_{43}	۵/۸۸۰۸۸	۹/۲۲۲۴۵
W_{34}	۰/۳۲۷۷۵	W_{44}	۳/۰۲۴۵۵	۹/۲۲۸۲۲
W_{35}	−۰/۰۰۵۲۴	W_{45}	-0/05128	9/78708
W_{36}	۰/۰۰۱۱۸	W_{46}	0/01064	9/01627
W_{37}	−۰/۰۰۰۳۸	W_{47}	-0/00384	10/10684
W_{38}	−۰/۰۰۱۵۴	W_{48}	−۰/۰۱۴۶۴	9/50857

دور محاسباتی پنجم – جدول ۸ μ_o = ۱/(۹/۲۴۶۷۷)

W_4		W_5		R_p
W_{41}	0/00030	W_{51}	0/00280	9/3333
W_{42}	۱	W_{52}	9/24677	9/24677
W_{43}	0/63537	W_{53}	5/87158	9/24119
W_{44}	0/32677	W_{54}	3/02008	9/24222
W_{45}	-0/00554	W_{55}	-0/05169	9/33115
W_{46}	0/00115	W_{56}	0/01058	9/19661
W_{47}	-0/00041	W_{57}	-0/00389	9/48488
W_{48}	-0/00158	W_{58}	-0/01469	9/29816

دور محاسباتی ششم – جدول ۹ μ_o = ۱/(۹/۲۴۵۲۷)

W_5		W_6		R_p
W_{51}	0/00030	W_{61}	0/00280	9/34397
W_{52}	۱	W_{62}	۹/۲۴۵۲۷	۹/۲۴۵۲۷
W_{53}	0/63499	W_{63}	5.91229	9/31083
W_{54}	0/32661	W_{64}	3.01934	9/24449
W_{55}	-0/00559	W_{65}	-0.05178	9/26234
W_{56}	0/00114	W_{66}	0/01056	9/26316
W_{57}	-0/00042	W_{67}	-0/00390	9/27809
W_{58}	-0/00159	W_{68}	-0/01470	9/24465

دور محاسباتی هفتم – جدول ۱۰ μ_7 = ۱/(۹/۲۵۹۷۵)

W_6		W_7		R_p
W_{61}	0/00030	W_{71}	0/00277	9/22990
W_{62}	۱	W_{72}	۹/۲۵۹۷۵	۹/۲۵۹۷۵
W_{63}	0/63949	W_{73}	5/88517	9/20291
W_{64}	0/32658	W_{74}	3/02623	9/26644
W_{65}	-0/00560	W_{75}	-0/05119	9/14136
W_{66}	0/00114	W_{76}	0/01066	9/35386
W_{67}	-0/00042	W_{77}	0-/00382	9/08667
W_{68}	-0/00159	W_{78}	-0/01462	9/19616

دور محاسباتی هشتم – جدول ۱۱ μ_8 = ۱/(۹/۲۴۷۴۵)

W_7		W_8		R_p
W_{71}	0/00030	W_{81}	0/00280	9/32763
W_{72}	۱	W_{82}	9/24745	9/24745
W_{73}	0/63556	W_{83}	5/87228	9/23954
W_{74}	0/32681	W_{84}	3/02041	9/24210
W_{75}	-0/00553	W_{85}	-0/05166	9/34278
W_{76}	0/00115	W_{86}	0/01058	9/20078
W_{77}	-0/00041	W_{87}	-0/00388	9/47585
W_{78}	-0/00158	W_{88}	-0/01469	9/29582

دور محاسباتی نهم – جدول ۱۲ μ_9 = ۱/(۹/۲۴۵۳۹)

W_8		W_9		R_p
W_{81}	0/00030	W_{91}	0/00280	9/33333
W_{82}	۱	W_{92}	9/24539	9/24539
W_{83}	0/63502	W_{93}	5/87016	9/24406
W_{84}	0/32662	W_{94}	3/01941	9/24442
W_{85}	-0/00559	W_{95}	-0/05176	9/25891
W_{86}	0/00114	W_{96}	0/01057	9/26898
W_{87}	-0/00042	W_{97}	-0/00390	9/27663
W_{88}	-0/00159	W_{98}	-0/01470	9/24426

دور محاسباتی دهم - جدول ۱۳

W_9		W_{10}		R_p
W_{91}	0/00030	$W_{10,1}$	0/00280	9/25773
W_{92}	۱	$W_{10.2}$	9/24503	9/24503
W_{93}	0/63493	$W_{10.3}$	5/86980	9/24479
W_{94}	0/32658	$W_{10,4}$	3/01922	9/24497
W_{95}	-0/00560	$W_{10,5}$	-0/05177	9/24526
W_{96}	0/00114	$W_{10,6}$	0/01056	9/24029
W_{97}	-0/00042	$W_{10,7}$	-0/00390	9/24083
W_{98}	-0/00159	$W_{10,8}$	-0/01470	9/24545

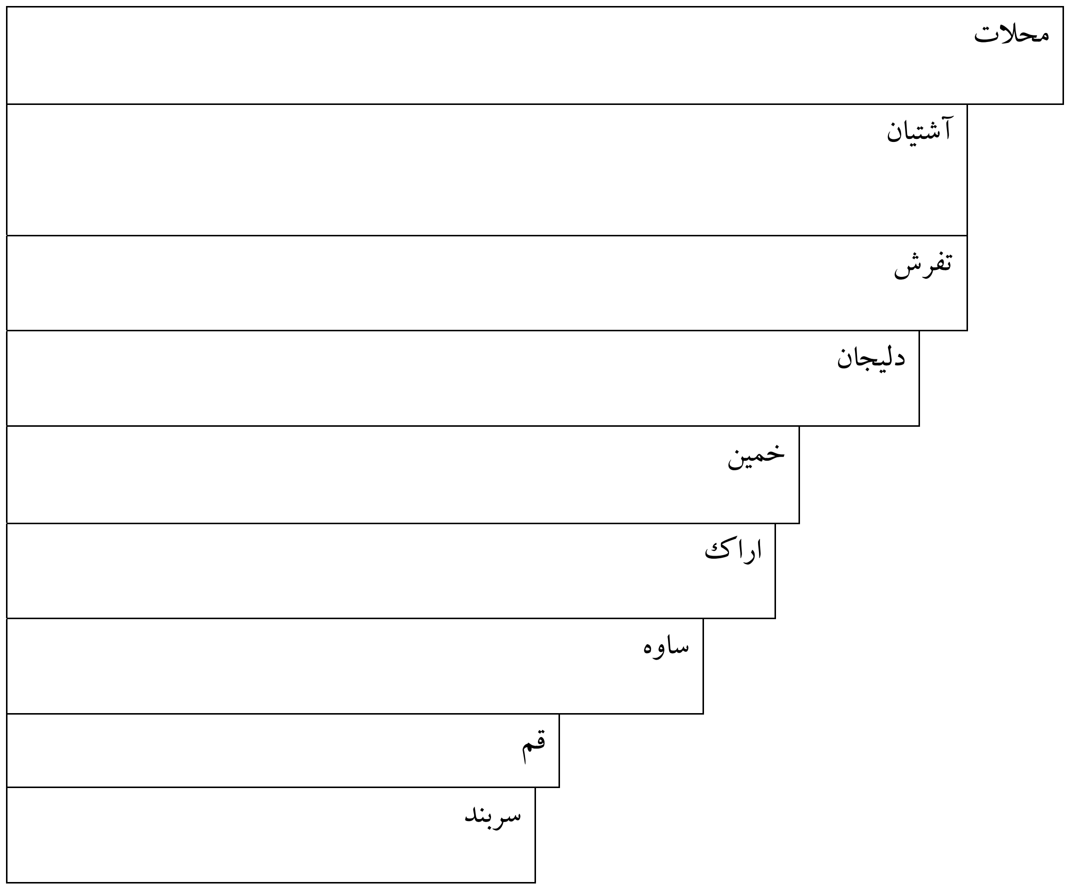
بردار مؤلفه‌های اصلی Z_i جدول ۱۴

مؤلفه اصلی	شهرستان
۵۰/۳۶۱۲۹	اراک
۳۸/۹۴۷۵۵	سربند
۶۶/۵۸۷۹	تفرش
۶۶/۹۷۱۸۲	آشتیان
۵۳/۱۸۴۲۶	خمین
۴۹/۸۵۵۶۸	ساوه
۳۹/۷۷۹۰۶	قم
۷۱/۰۹۸۹۴	محلات
۶۳/۱۵۴۸۴	دلیجان

شاخص وضعیت آموزشی شهرستان‌های استان مرکزی به ترتیب از محرومترین به برخوردارترین جدول ۱۵

مؤلفه اصلی	شهرستان	ردیف
۳۸/۹۴۷۵۵	سربند	۱
۳۹/۷۷۹۰۶	قم	۲
۴۹/۸۵۵۶۸	ساوه	۳
۵۰/۳۶۱۲۹	اراک	۴
۵۳/۱۸۴۲۶	خمین	۵
۶۳/۱۵۴۸۴	دلیجان	۶
۶۶/۸۵۸۷۹	تفرش	۷
۶۶/۹۷۱۸۲	آشتیان	۸
۷۱/۰۹۸۹۴	محلات	۹

نمودار شاخص وضعیت اموزشی شهرستان‌های استان مرکزی – نمودار یک



منابع و مآخذ

۱- آنالیز تکسونومی (روش طبقه‌بندی گروه‌های همگن) و کاربرد آن در طبقه‌بندی شهرستان‌ها و ایجاد شاخص‌های توسعه جهت برنامه‌ریزی منطقه‌ای – سازمان برنامه و بودجه استان مرکزی بیژن بیدآباد – تیرماه ۱۳۶۲

2- Foundation of econometrics, A. Madansky; N.H.C., New York 1976.
3- Applied consumption analysis, L. Phlips; N.H.C. New York 1974.
4- Introduction to statistical analysis, W.J. Dixon & F.J.Massey Mc Graw Hill, 1969.
5- Applied multivariate analysis, J.E. Overall & C.J.Klett, New York Mc Craw Hill.
6- Introduction to multivariate analysis for the social sciences J.P. Van de Geer, San Francisco: W.H. Freeman, 1971.
7- Multivariate analysis, M.M. Tatsuoka, New York, Wiley 1971.
8- Multivariate data analysis, W.W. Cooley & P.R. Lohnes New York Wiley 1971.
9- Microeconomic theory, Henderson & Quandt, Mc Graw Hill 1971 Tokyo.
10- Elementary linear algebra, H. Anton, Wiley New York, 1971.
11- Maxima and minima, R. Frisch Reidel Holland, 1960.
12- Factor analysis as a statistical method, D.N. Lawley & A.E. Maxwell, 1971, London, Butterworth.

13- Modern factor analysis, H. H. Harman Chicago University press 1960.
14- Analysis of survey data, vol. I, exploring data structures, Colm. A. O, Mmuircheartaigh & Clive Payne, Wiley 1978, England.
15- Computational matrix algebra, D.I. Steinberg, Mc Graw Hill, 1974.
16- Regional Science techniques in practices, Czamanski, Lexington book 1972.
17- Econometric methods, J. Johnston, Mc. Graw Hill, 1972.
18- Applied numerical methods, Carnahan, Brice, H.A. Luther, &J.O. Wilkes, Wiley , New York, 1969.
19- Computer solution of linear algebraic systems, Forsythe, George & Cleve B. Moer, Prentice hall, Englewood, N.J., 1967.
20- Matrix theory, Franklin J.N., Prentice hall, Englewood, cliffs N.J., 1968.
21- Introduction to numerical analysis, Froberg C.E., Addison Wesley reading Mass. 1969.
22- Analysis of numerical methods, Isaacson E.& H. B. Keller Wwiley New York 1966.
23- The algebraic eigenvalue problem, Wilkinson J.H., Oxford University press London, 1965.