نویسنده : بیژن بید آباد

الگوی ریاضی محاسبه همزمان قیمتهای ترجیحی و تعداد قطعات در طرحهای غیرانتفاعی آماده‌سازی زمین

گرچه مسائل واقعی اقتصاد ــ برخلاف اصل Ceteris paribus که همیشه در نظریه‌های اقتصادی ملحوظ است ــ همواره پیچیدگیهای زیادی را در بردارد، ولی اغلب می‌توان برای آن راه‌حلهایی ریاضی پیدا کرد. در این یادداشت سعی براین است که مسئلهٔ عمومی طرحهای آماده‌سازی زمین از دیدگاه یک نهاد غیرانتفاعی مورد بحث قرار گیرد. مسئلهٔ این طرحها عموماً به این شکل است که زمینی به متراژ معین جهت توزیع بین عده‌ای افراد در نظر گرفته می‌شود. مسائل طراحی، تسطیح، آماده‌سازی و غیره مستلزم هزینه‌هائی است. نهاد مالک زمین مربوط، علاقه‌مند به این است که زمین مورد نظر را برای ساختمان آماده سازد و به متقاضیان بفروشد و انتظار هیچ سودی ندارد. از طرفی دیگر مایل است که هیچ بار مالی برای خود ایجاد نکند. به عبارت دیگر هیچ سود یا زیانی در رابطه با فروش این زمین آمادهٔ ساختمان، تحصیل ننماید.

مسئله اصلی از اینجا شکل می‌گیرد که زمین مورد نظر به چند قطعه زمین با متراژهای مختلف تقسیم شود و از طرفی، قیمت زمینها طوری محاسبه گردد که افراد با درآمد کمتر، هزینه کمتری نسبت به افراد متقاضی با درآمد بیشتر، متحمل شوند. به عبارت دیگر قیمتهای ترجیحی طوری انتخاب شود که کم درآمدها سوبسیدی از پر درآمدها دریافت دارند. از طرف دیگر باید تعداد قطعات طوری تنظیم شود که مجموع هزینه خرید زمین و هزینه ساخت آن با توزیع درآمد جامعهٔ خریداران، رابطهٔ معقول داشته باشد. چه اگر این امر مدنظر قرار نگیرد، چه بسا قطعات زمین بزرگ یا کوچک به تعداد زیاد در نظر گرفته شود که توان خریداران کمتر یا بیشتر از آن باشد و تعدادی از زمینها بدون متقاضی بماند. نکتهٔ دیگر اینکه هر چه متراژ زمین بالاتر رود هزینه ساخت نیز بیشتر می‌شود و این نکته احتیاج به توزیع مجدد تعداد قطعات و متراژ آنها دارد. پرداختن به مسائل دیگری مانند پارکها، معبرها، محوطه‌های آموزشی، فرهنگی، بهداشتی و بازارها نیز به این مسئله افزوده می‌شود. محدودیتهایی از قبیل پوشش کل زمین و کل هزینه نیز باید برقرار شود. در این یادداشت راه‌حلی ارائه می‌شود که کلیهٔ مسائل فوق را یکجا به طور همزمان حل نماید. روش حل به صورت چندین معادلهٔ غیرخطی، خطی و معادلات انتگرال می‌باشد که پس از فرموله کردن آن به

روش حل آن نیز اشاره خواهد شد. حال پارامترهای مفروض مسئله را معرفی می نماییم:

قیمت زمین نوع i در شهرک های مشابه یا همسایه P_i

متراژ زمین نوع i X_i

تعداد انواع زمین با متراژ مختلف m

کل هزینه آماده‌سازی زمین T

مساحت محوطه های فرهنگی s_1

مساحت محوطه های بهداشتی s_2

مساحت محوطه های تجاری s_3

$\vdots$

s_l ....

قیمت زمین محوطه های فرهنگی (مترمربع) f_1

قیمت زمین محوطه های بهداشتی (مترمربع) f_2

قیمت زمین محوطه های تجاری (مترمربع) f_3

$\vdots$

f_l ....

خالص کل زمین محوطه های مسکونی S

متغیرهای مجهول مدل عبارتند از:

قیمت ترجیحی زمین نوع i q_i

تعداد قطعه زمین نوع i n_i

متغیرهای کمکی زیر را نیز تعریف می‌کنیم:

هزینه خالص آماده‌سازی زمین برای زمینهای مسکونی

$$G = T - \sum_{i=1}^{l} s_i f_i$$

تعداد کل قطعات زمین

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

حداقل هزینه لازم برای ساخت زمین نوع i

$$c_i = k_i x_i h_i$$

نسبت حداقل زیربنای ساختمان برای زمین نوع i k_i

حداقل هزینه لازم برای هر مترمربع زمین نوع i h_i

فراوانی نسبی افراد ناتوان برای خرید زمین و ساختمان آن

$$A_0 = \int_{0}^{c_1 + q_1 x_1} f(u)\, du$$

فراوانی نسبی افرادی که سرمایهٔ آنان برای خرید زمین نوع i و ساختمان آن کافی می باشد ولی توانایی خرید زمین نوع i + 1 و ساختمان آن را ندارند.

$$A_i = \int_{c_i + q_i x_i}^{c_{i+1} + q_{i+1} x_{i+1}} f(u)\, du$$

متغیر کمکی در تعریف انتگرال های فوق u

تابع چگالی توزیع سرمایه برای متقاضیان خرید زمینها که به صورت تابع چگالی احتمال لوگ ـ نرمال تعریف شده است.

$$f(u) = \frac{1}{u\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[\frac{(\ln u - \mu)^2}{-2\sigma^2}\right]$$

به جای این توزیع می توان توابع چگالی دیگری را در نظر گرفت، مانند تابع پارتو (pareto) که دارای چولگی می باشد، ولی آزمونهای مکرر اعتبار این توزیع را در این گونه مسائل نشان داد.[1]

پارامتر توزیع log - normal σ

پارامتر توزیع log - normal μ

امید ریاضی سرمایه متقاضیان خرید زمین

$$E(u) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

واریانس سرمایه متقاضیان خرید زمین

$$Var(u) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

قبل از فرموله کردن مدل مقادیر μ و σ^2 برای توزیع احتمالی $f(u)$ را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم. دو معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$E(u) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (1)$$

$$Var(u) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} \quad (2)$$

[1]ــ برای اطلاعات بیشتر مراجعه شود به:

Stuart , Kendall (1977), Cramer (1973), Kapadia, Owen Patel. (1976),

این دو معادلهٔ همزمان را به شکل زیر برای μ و σ^2 برحسب $E(u)$ و $Var(u)$ حل می‌کنیم:

(۳)
$$Var(u) = e^{2\mu + \sigma^2 + \sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2} . e^{\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

$$Var(u) = e^{2\mu + \sigma^2} [e^{\sigma^2} - 1]$$

(۴)
$$\ln E(u) = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \Longrightarrow \ln E(u) - \frac{\sigma^2}{2} = \mu$$

(۵)
$$Var(u) = \left(e^{2 [\ln E(u) - \frac{\sigma^2}{2}] + \sigma^2} \right) [e^{\sigma^2} - 1] = e^{2\ln E(u)} [e^{\sigma^2} - 1]$$

(۶)
$$Var(u) = e^{2\ln E(u) + \sigma^2} - e^{2\ln E(u)}$$

(۷)
$$\ln(e^{2\ln E(u) + \sigma^2}) = \ln (Var(u) + e^{2\ln E(u)}) = 2\ln E(u) + \sigma^2$$

(۸)
$$\sigma^2 = \ln [Var(u) + e^{2\ln E(u)}] - 2\ln E(u)$$

(۹)
$$\sigma^2 = \ln \frac{Var(u) + e^{2\ln E(u)}}{E^2(u)} = \ln \frac{Var(u) + E^2(u)}{E^2(u)}$$

(۱۰)
$$\sigma^2 = \ln \left[\frac{Var(u)}{E^2(u)} + 1 \right]$$

(۱۱)
$$\mu = \ln E(u) - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{Var (u)}{E^2 (u)} + 1 \right] = \ln \frac{E (u)}{\sqrt{\frac{Var (u)}{E^2 (u)} + 1}}$$

(۱۲)
$$\mu = \ln \frac{E^2 (u)}{\sqrt{Var(u) + E^2 (u)}}$$

معادلات (۱۰) و (۱۲) را در تابع $f(u)$ قرار می‌دهیم:

(۱۳)

$$f(u) = \frac{1}{u\sqrt{2\pi \ln\left[\frac{Var(u)}{E^2(u)}+1\right]}}\, e^{-\frac{\left(\ln u - \ln \frac{E^2(u)}{\sqrt{Var(u)+E^2(u)}}\right)^2}{2\ln\left[\frac{Var(u)}{E^2(u)}+1\right]}}$$

با گذاشتن مقادیری برای E (u) و Var(u) که از نمونه‌ای از جامعهٔ آماری متقاضیان محاسبه شده باشد می‌توان تابع توزیع درآمد را به شکل (۱۳) بیان نمود.

حال برگردیم به فرموله کردن مدل، اگر هدف را این قرار دهیم که مازاد مصرف کننده (consumer surplus)[۲] برای کلیه خریداران زمین برابر شود، می‌توان معادلهٔ زیر را نوشت:

$$(p_i - q_i)\, x_i = (p_1 - q_1)\, x_1 \quad \forall\, i \in \{2,\ldots\ldots,m\} \tag{۱٤}$$

به عبارت دیگر چون قیمتهای ترجیحی کمتر از قیمت بازار آزاد است و قیمت هر مترمربع قطعات بزرگتر زمین کمتر از قطعات کوچکتر می‌باشد، لذا میزان سوبسید یا مازادی که دریافت کنندگانِ زمین نوع i تحصیل می‌کنند برابر است با (۱٤).

می‌توان q_i را یک تابع کلی تقاضا تعریف کرد، ولی اینجا سعی بر این شده است که تا حد توان ازپیچیدگی مسئله جلوگیری شود.

کل هزینهٔ خالص آماده‌سازی برای مناطق مسکونی باید محدودیت زیر را برقرار سازد.

$$\sum_{i=1}^{m} n_i x_i q_i = G \tag{۱۵}$$

کل قطعات زمین باید برابر کل مساحت زمین باشد پس:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = S \tag{۱٦}$$

۲ــ مراجعه شود به کتاب Henderson و Quandt (1980)

نسبت مجموع قطعات زمین نوع i به کل قطعات باید برابر باشد.

$$\frac{n_i}{n} = \frac{1}{1-A_0}\int_{q_i x_i + c_i}^{q_{i+1} x_{i+1} + c_{i+1}} f(u)du \qquad \forall_i \in \{1,...,m-1\} \qquad (۱۷)$$

نسبت مجموع قطعات زمین نوع m به کل قطعات برابر شود با:

$$\frac{n_m}{n} = \frac{1}{1-A_0}\int_{q_m x_m + c_m}^{\infty} f(u)du \qquad (۱۸)$$

که $f(u)$ در (۱۷) و (۱۸) توسط معادلهٔ (۱۳) تعریف شده است.

معادلات (۱۴) و (۱۵) و (۱٦) و (۱۷) و (۱۸) جمعاً $2m+1$ معادلهٔ همزمان با $2m$ مجهول $(q_i, n_i, i=1, ..., m)$ می باشد که می توان آن را توسط روشهای آنالیز عددی حل نمود. لازم به توضیح است که یک معادله دو بار تکرار شده، زیرا (۱۸) باقیمانده سطح زیر منحنی است که می توان آن را از معادلات (۱۷) محاسبه نمود. روش حل به این صورت است که کلیهٔ معادلات را درهم جایگزین می‌کنیم تا یک معادلهٔ ضمنی برای q_1 برحسب پارامترهای دانستهٔ الگو بدست آید.

ریشهٔ تابع q_1 را با روش دونیم کردن (bisection) بدست می آوریم. در این راه برای محاسبهٔ انتگرالهای معین از تربیع (quadrature) لاگرانژ استفاده می نمائیم. بدین ترتیب که فرض می‌کنیم q_1 بین دو مقدار عددی دلخواه قرار دارد، روش دو نیم کردن[3] فاصله را کمتر می سازد و به مقدار q_1 که تابع q_1 را صفر می‌کنند، نزدیک می شویم. مقادیر جملات تابع q_1 را چون برحسب انتگرالهایی تعریف شده است در هر قدم با محاسبه مقدار انتگرال معین از یکی از روشهای معمول محاسبه سطح زیر منحنی[4] پیدا می‌کنیم.

حال بپردازیم به حل معادلات مزبور، معادلهٔ (۱٤) را برای q_i حل می‌کنیم:

$$p_i x_i - q_i x_i = (p_1 - q_1)\, x_1 \qquad (۱۹)$$

$$q_i = p_i - \frac{x_1}{x_i}(p_1 - q_1) \qquad i = 2,...,m \qquad (۲۰)$$

۳ــ رجوع شود به Boor (1983) و Conte.

٤ــ رجوع شود به Rabinowitz (1985) و Ralston و Rice (1985)

معادله (۲۰) را در معادلات (۱۷) و(۱۸) قرار می دهیم:

$$\frac{n_i}{n} = \frac{1}{1 - \int_0^{c_1 + q_1 x_1} f(u)\,du} \int_{c_i + p_i x_i + (p_1 - q_1) x_1}^{c_{i+1} + p_{i+1} x_{i+1} + (p_1 - q_1) x_1} f(u)\,du \qquad i = 1,\ldots,m-1 \tag{۲۱}$$

$$\frac{n_m}{n} = \frac{1}{1 - \int_0^{c_1 + q_1 x_1} f(u)\,du} \int_{c_m + p_m x_m + (p_1 - q_1) x_1}^{\infty} f(u)\,du \tag{۲۲}$$

معادلات (۲۱) و(۲۲) را به شکل خلاصه زیر می نویسیم:

$$\frac{n_i}{n} = \frac{1}{1 - A_0} A_i \tag{۲۳}$$

معادله (۲۲) بدلیل اینکه باقیماندهٔ سطح زیر انتگرال از $c_m + p_m x_m + (p_1 - q_1) x_1$ تا بینهایت می باشد خودبخود بدست خواهد آمد، چون سطح زیر منحنی چگالی احتمال برابر یک است. پس مقدار(۲۲) برابر است با یک منهای مجموع فراوانی نسبی زمینهای دیگر. معادله (۲۳) را به ازای $i \neq 1$ بر کلیه مقادیر آن به ازای $i = 1$ تقسیم می‌کنیم حاصل برابر است با:

$$\frac{\dfrac{n_i}{n}}{\dfrac{n_1}{n}} = \frac{\dfrac{1}{1 - A_0} A_i}{\dfrac{1}{1 - A_0} A_1} \tag{۲۴}$$

$$\frac{n_i}{n_1} = \frac{A_i}{A_1} \qquad i = 2,\ldots, m-1 \tag{۲۵}$$

(۲۶)

$$n_i = \frac{A_i}{A_1} n_1$$

معـادلـه (۲۶) به ازای $i = 2, \ldots, m-1$ را در معادلهٔ (۲۳) به ازای $i = 1$ قرار می دهیم و به جای n مقدار آن را که مجموع n_i ها است می‌گذاریم:

(۲۷)

$$\frac{n_1}{\sum_{i=1}^{m} n_i} = \frac{A_1}{1 - A_0}$$

(۲۸)

$$n_1 (1 - A_0) - A_1 \sum_{i=1}^{m} n_i = 0$$

می شود:

(۲۹)

$$n_1 (1 - A_0) - A_1 \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{A_i}{A_1} n_1 \right) - A_1 n_m = 0$$

(۳۰)

$$n_1 \left(1 - \sum_{i=0}^{m-1} A_i \right) - A_1 n_m = 0$$

مقدار n_m برابر است با:

(۳۱)

$$n_m = \frac{\left(1 - \sum_{i=0}^{m-1} A_i \right)}{A_1} n_1$$

مقـدار A_m را مساوی داخل پـرانـتـز (۳۱) قرار می دهیم:

(۳۲)

$$A_m = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} A_i$$

(۳۱) را مجدداً می نویسیم:

(۳۳)

$$n_m = \frac{A_m}{A_1} n_1$$

معــــــادلات (۲۶) و(۳۳) را در(۱۶) قــرار می دهیم:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{A_1} n_1 x_i = S \quad (۳٤)$$

یا

$$\frac{n_1}{A_1} \sum_{i=1}^{m} A_i x_i = S \quad (۳۵)$$

مقدار n_1 برابر است با:

$$n_1 = \frac{SA_1}{\sum_{i=1}^{m} A_i x_i} \quad (۳٦)$$

(۳٦) را در مــــــعــــــادلات (۳۳) و(۲٦) قــرار می دهیم:

$$n_i = \frac{A_i S}{\sum_{i=1}^{m} A_i x_i} \quad (۳۷)$$

حال معادلهٔ (۱۵) را در نظر گرفته، معادلات (۳۷) و(۲۰) را در آن جایگزین می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i S}{\sum_{i=1}^{m} A_i x_i} . x_i q_i = G \quad (۳۸)$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i q_i = \frac{G \sum_{i=1}^{m} A_i x_i}{S} \quad (۳۹)$$

$$A_1 x_1 q_1 + \sum_{i=2}^{m} A_i x_i q_i = \frac{G \sum_{i=1}^{m} A_i x_i}{S} \qquad (٤٠)$$

$$A_1 x_1 q_1 + \sum_{i=2}^{m} A_i (p_i x_i - p_1 x_1 + q_1 x_1) = \frac{G \sum_{i=1}^{m} A_i x_i}{S} \qquad (٤١)$$

$$A_1 x_1 q_1 + \sum_{i=2}^{m} A_i p_i x_i - p_1 x_1 \sum_{i=2}^{m} A_i + q_1 x_1 \sum_{i=2}^{m} A_i = \frac{G \sum_{i=1}^{m} A_i x_i}{S} \qquad (٤٢)$$

$$q_1 x_1 \sum_{i=1}^{m} A_i + \sum_{i=2}^{m} A_i p_i x_i - p_1 x_1 \sum_{i=2}^{m} A_i = \frac{G \sum_{i=1}^{m} A_i x_i}{S} \qquad (٤٣)$$

چون سطح زیرمنحنی چگالی برابریک است داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{i=1}^{m-1} A_i + A_m \qquad (٤٤)$$

مقدار A_m از (۳۲) را جایگزین می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{i=1}^{m-1} A_i + 1 - \sum_{i=0}^{m-1} A_i = 1 - A_0 \qquad (٤٥)$$

همچنین می توان نوشت:

$$\sum_{i=2}^{m} A_i = \sum_{i=2}^{m-1} A_i + 1 - \sum_{i=0}^{m-1} A_i = 1 - A_0 - A_2 \qquad (٤٦)$$

روابط (۴۵) و (۴۶) را در (۴۳) جایگزین می‌کنیم:

(۴۷)

$$q_1x_1(1-A_0)+\sum_{i=2}^{m} A_i p_i x_i - p_1x_1(1-A_0-A_1)=\frac{G\sum_{i=1}^{m} A_i x_i}{S}$$

به عبارت دیگر می توان نوشت:

(۴۸)

$$q_1x_1(1-A_0)+\sum_{i=1}^{m} A_i p_i x_i - p_1x_1(1-A_0)=\frac{G\sum_{m=1}^{m} A_i x_i}{S}$$

(۴۹)

$$(q_1-p_1)\,x_1(1-A_0)+\sum_{i=1}^{m} A_i x_i\left(p_i-\frac{G}{S}\right)=0$$

معادلهٔ فوق معادلهٔ تابع ضمنی برحسب q_1 است. توجه نمائید که حد بالا وپائین انتگرالهائی که توسط A_i تعریف شده توابعی برحسب q_1 می باشند و نتیجتاً معادلهٔ (۴۹) به یک معادلهٔ انتگرال تبدیل شده است. همانطور که گفته شد طبق روش مذکور در صفحات قبل می توان ریشهٔ آنرا محاسبه نمود. لازم به یادآوری است که (۴۹) تنها تابع q_1 است و به $n_m, q_2, \dots, q_m$ $n_1, \dots,$ بستگی ندارد. پس ازپیدا کردن مقدار q_1 می توان آنرا در معادلات (۳۷) و (۲۰) قرار داد تا مقادیر سایر مجهولات را محاسبه نمود.

این روش برای زمینهای واگذاری دولت در آستارا آزمایش گردید. در این آزمایش از بسته نرم افزاری SPSS (statiatical package for social sciences) برای بررسی خواص آماری جامعهٔ متقاضیان خرید زمین استفاده گردید نرم افزار SSP(scientific subroutine package) با برنامه هائی به زبان FORTRAN پیوند داده شدند تا بتوانند ریشهٔ تابع ضمنی q_1 را محاسبه نمایند. نتایج گزارش شده همگی نیازهای مسئله را برقرار نمود.

منابع ومآخذ :

- Sir Maurice Kendall, Alan Stuart (1977) The advanced theory of statistics. Vol 1. 4th ed., distribution theory, Charles Griffin & Co, London.
- J. S. Cramer (1973) Empirical econometrics, North, Holland, Amsterdam.
- J. K. Patel, C. H. Kapadia, D. B. Owen (1976) Handbook of statistical distributions, Marcel Dekker, Inc. New York.
- J. M. Henderson, R. E. Quandt (1980) Microeconomic theory, a mathematical approach, Wiley, New York.
- S. D. Conte, C. D. Boor (1983) Elementary numerical analysis, an algorithmic approach, 3rd ed. Wiley, New York.
- A. Ralston, P. Rabinowitz (1985) A first course in numerical analysis, Wiley, New York.
- J. R. Rice (1985) Numerical methods, software and analysis McGraw-Hill.
- SSPIII, system / 360 scientific subroutine package Ver. III., programer's manual, IBM.
- SPSS, statistical Package for social seionces, 2nd ed.